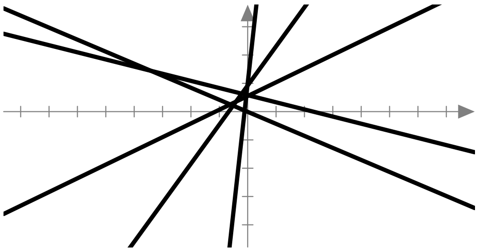
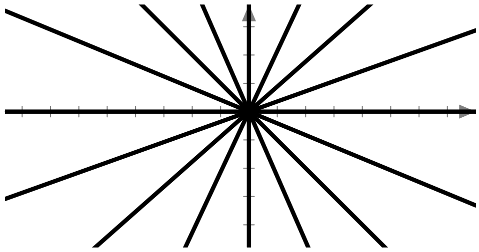
(2.10) Linearsysteme

Definition. *Ein Linearsystem von ebenen Kurven ist ein linearer Unterraum $V \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Die Kurven $C = V(f)$, $f \in V$ mit $f \neq 0$ und $Grad(f) \geq 1$ heißen Systemkurven, $C \in |V|$. Seien $P_1, \ldots, P_r$ Punkte aus der affinen Ebene $\mathbb{A}^2 (= \mathbb{C}^2)$, dann beschreibt $V(P_1, \ldots, P_r) = \{f \in V | f(P_1) = \ldots = f(P_r)\} \subset V$ die affin algebraische Kurve durch die Punkte $P_1, \ldots, P_r$. (Es gilt also $V(P)(Q) = V(P, Q)$) $C \in |V(P_1, \ldots, P_r)| \Leftrightarrow C \in |V|$ und $P_1, \ldots, P_r \in C$*

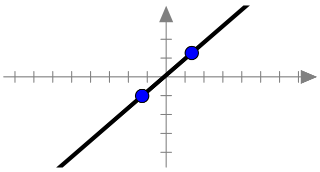
Beispiel. $V = \mathbb{C}[X, Y]_{\leq 1} = \{a + bX + cY\}$ dreidimensionale Systemkurven, als Geraden in der Ebene:



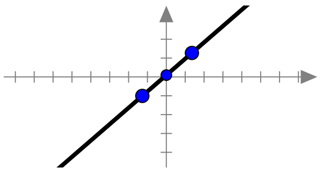
(a) $|V|$ beliebige Geraden



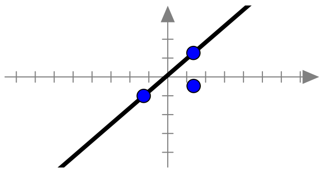
(b) $|V(P)|$ Gerade durch den Punkt P, hier $(0, 0)$



(a) $|V(P, Q)|$ nur noch eine Systemkurve



(b) $|V(P, Q, R)| \neq \emptyset$ wenn P, Q, R kollinear



(c) $|V(P, Q, R)| = \emptyset$

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt:
$V \supsetneq V(P) \Leftrightarrow$ Nicht alle $C \in |V|$ gehen durch $P \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(V(P)) + 1$
$V = V(P) \Leftrightarrow \forall C \in |V| : P \in C \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(V(P))$

Beispiel. $V = \mathbb{C}[X, Y]_{\leq 2}$ sechsdimensionale Systemkurven und $P_1, \ldots, P_5$ liegen nicht 4 auf einer Geraden. Dabei bezeichne $V_i = V(P_1, \ldots, P_i)$. Wenn nicht alle Punkte auf einer Geraden liegen sinkt die Dimension der V_i immer um eins ab.
Wir betrachten den Fall das 4 Punkte auf einer Geraden liegen. Zunächst schneidet ein Polynom vom Grad 2 die 3 Punkte. Das bedeutet, dass der Kegelschnitt aus 2 Geraden bestehen muss und deshalb stellt die Hinzunahme eines vierten Punktes keine neue Bedingung dar. Es folgt also $V_3 = V_4$. Das bedeutet es existiert ein eindeutiger Kegelschnitt durch $P_1, \ldots, P_5$

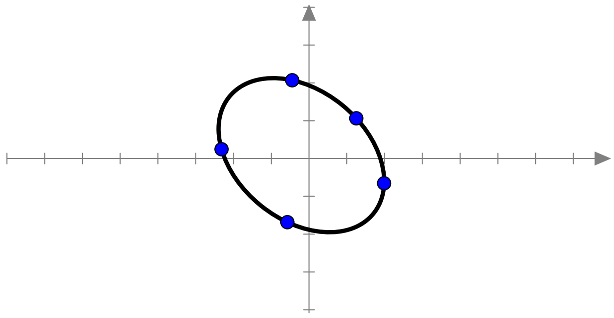


Abbildung 3: Kegelschnitt durch fünf Punkte

Wir wollen nun zeigen, dass es Kurven gibt die durch $P_1, \ldots, P_4$ gehen aber nicht durch P_5. Dazu betrachten wir die 2 Fälle, zunächst den Fall das P_i, P_j, P_5 für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$ nicht auf einer Geraden liegen.

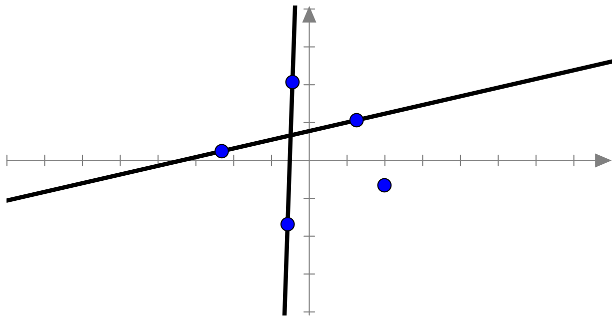
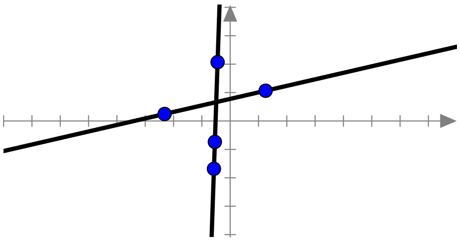
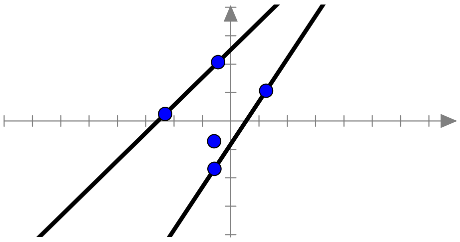


Abbildung 4: P_5 liegt auf keiner Verbindungsgerade von P_i mit P_j

Nun den Fall, dass P_5 auf einer Verbindungsgeraden liegt. Wir wählen O.b.d.A aus P_5 liegt auf der Verbindungsgerade von P_1 zu P_2. Dann können wir wir durch Neuverbinden der Punkte ein Geradenpaar erzeugen auf dem P_5 nicht liegt.



(a) P_5 liegt auf Verbindungsgeraden

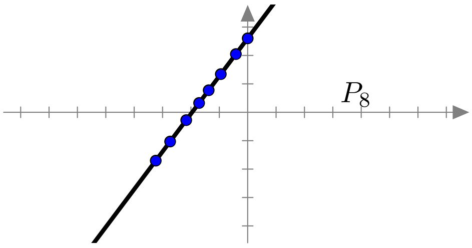


(b) P_5 liegt nicht mehr auf einer Verbindungsgeraden

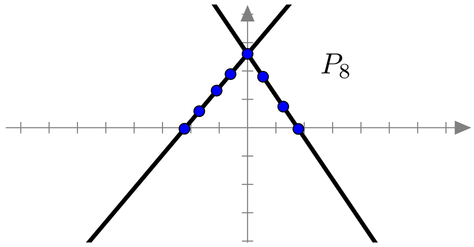
Jetzt betrachten wir Kubiken $V = \mathbb{C}[X, Y]_{\leq 3}$ die einen 10-dimensionalen Vektorraum erzeugen, wobei $P_1, \ldots, P_8 \in (A)^2$.

Lemma. Wenn nicht 5 der P_i auf einer Geraden und nicht 8 auf einer Quadrik liegen, dann gilt $V_7 \neq V_8$

Beweis. Idee: Konstruiere eine kubische Kurven $\in |V_7|$ der Form $C = L \cup Q$, aber nicht $\in |V_8|$. Hier sei L Gerade durch zwei der P_i und Q eine Quadrik durch fünf der P_i. Wir unterscheiden die Fälle durch Betrachtung der Geraden durch P_8 und P_i.

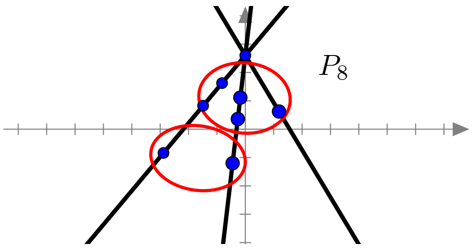


(a) Der dummer Fall, alle P_i auf einer Geraden ist ausgeschlossen

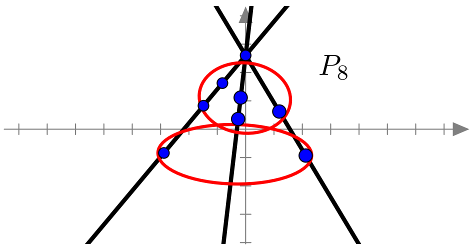


(b) Auch ausgeschlossen, 2 Geraden da dann mindestens 5 Punkte auf einer Geraden liegen

Wir haben also mindestens 3 Geraden zu betrachten.

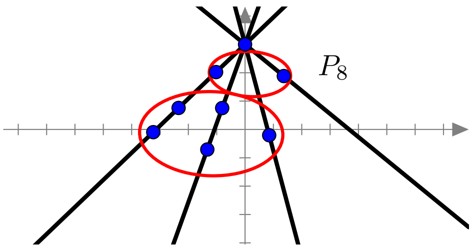


(a) I

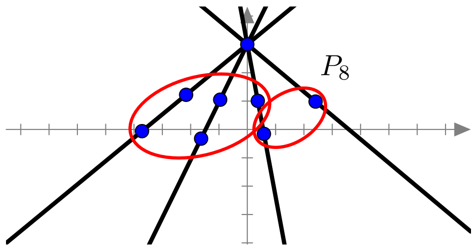


(b) II

Nun betrachten wir 4 Geraden:

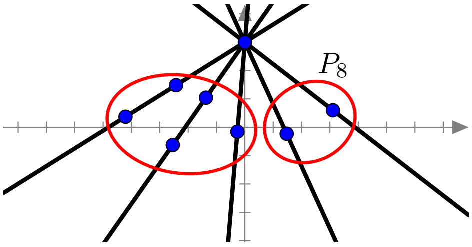


(a) III

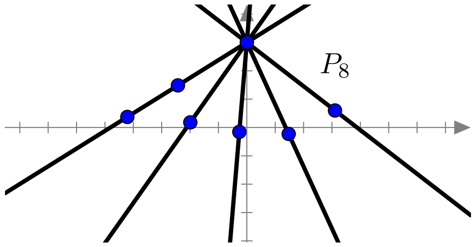


(b) IV

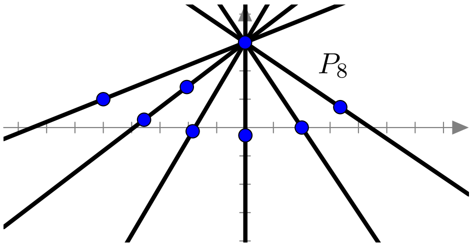
Jetzt werden 5 Geraden betrachtet:



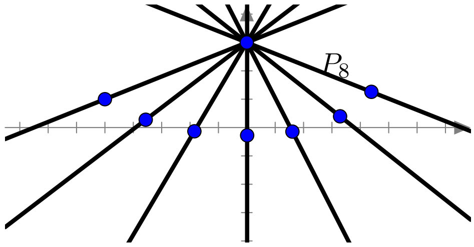
(a) V



(b) VI

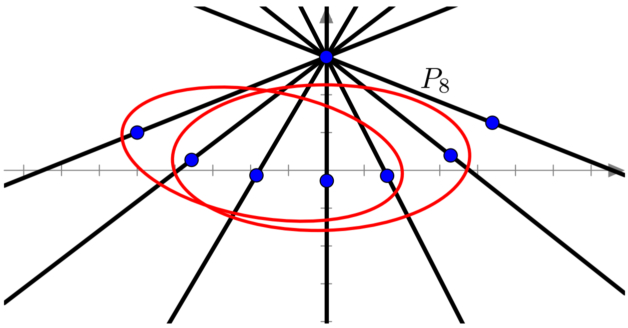


(a) VII



(b) VIII, allgemeiner Fall

Die Fälle I-V kann man sehr leicht zum Widerspruch führen:
Es gilt: Die Quadrik kann unmöglich durch P_8 gehen, denn 3 Punkte einer Quadrik können niemals auf einer Geraden liegen.
Die Fälle VI-VII: Man kann nicht zum Widerspruch führen, dass keine Quadrik taugt.
Betrachten wir nun den allgemeinen Fall VIII:
Es gilt: $P_8 \notin |P_iP_j|1 \leq i \neq j \leq 7$



Wir betrachten die zwei verschiedenen Quadriken Q_1, Q_2. Falls $P_8 \in Q_1$ und $P_8 \in Q_2$ sind, so gilt, dass die 4 gemeinsamen Punkte von Q_1 und Q_2 im Schnitt $Q_1 \cap Q_2$ liegen. Das bedeutet aber Q_1, Q_2 haben eine gemeinsame Komponente, also müssen Q_1, Q_2 Geradenpaare sein. Dies wiederum bedeutet, da die 4 gemeinsamen Punkte auf einer Geraden liegen, muss sogar $P_1, \ldots, P_7$ auf einer Geraden liegen, und das ist ein Widerspruch. $\square$

Proposition. Wenn $P_1, \ldots, P_8$ nicht auf einer Quadrik und nicht fünf der P_i auf einer Geraden liegen, dann ist $\dim(V_8) = 2$

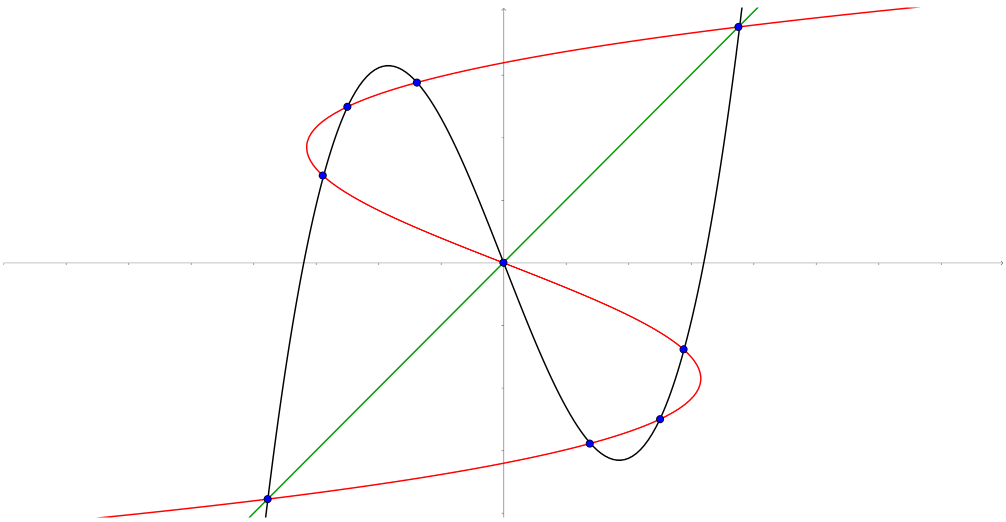
Beweis. Wir betrachten die absteigende Folge der V_i, deren Dimension immer um eins absinkt.

$$\begin{array}{ccccccccc} V & \supsetneq V_1 & \supsetneq V_2 & \supsetneq V_3 & \supsetneq V_4 & \supsetneq V_5 & \supsetneq V_6 & \supsetneq V_7 & \supsetneq V_8 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

□

Satz. (Satz vom 9. Punkt) Seien C, C' Kubiken mit $C \cap C' = \{P_1, \ldots, P_9\}$. Jede Kubik durch $P_1, \ldots, P_8$ geht durch P_9, in Formeln: $|V(P_1, \ldots, P_8)| = |V(P_1, \ldots, P_9)|$

Beweis. Da $\dim(V_8) = 2$ ist folgt für die Gleichungen von f für C und g für C', dass sie in V_8 liegen und sind linear unabhängig. Wären sie linear abhängig, lägen sie auf der gleichen Kurve und hätten somit unendlich viele gemeinsame Punkte.
$\Rightarrow V_8 = \langle f, g \rangle$
Wähle $h \in V_8 : h = \lambda f + \mu g$ mit $\lambda, \mu \in (C)$.
Dann gilt: $h(P_9) = \lambda f(P_9) + \mu g(P_9) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$



(a) Wenn 3 Punkte auf einer Geraden liegen, so liegen die anderen 6 auf einem Kegelschnitt

□

1 Lokale Eigenschaften

(3.1) Muliplizitäten

Schreibe das Polynom $f = \sum a_{ij} X_i Y_j \in \mathbb{C}[X, Y]$ als Summe seiner homogenen Bestandteile:

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d = \underbrace{a_{00}}_{f_0} + \underbrace{a_{10}X + a_{01}Y}_{f_1} + \underbrace{a_{20}X^2 + \ldots}_{f_2} = f(0) + \partial_x f(0) X + \partial_y f(0) Y + \ldots$$

mit $f_k \in \mathbb{C}[X,Y]_k$ homogen vom Grad k

Definition (Multiplizität)**.**

- *Für $f \neq 0$ setzen wir: $Mult_0(f) = \min\{k | f_k \neq 0\}$*
- *Wenn $P = (a,b) \in \mathbb{A}^2$, dann gilt $Mult_P(f) = Mult_0(f(X+a, Y+b))$*
- *Ist f die reduzierte Gleichung für eine Kurve C, $C = V(f)$ so setzen wir $Mult_P(C) := Mult_P(f)$*

Bemerkung.

- $P \in C \Leftrightarrow \mathrm{Mult}_P(C) \leq 1$
- $P \notin C \Leftrightarrow \mathrm{Mult}_P(C) = 0$
- Wenn P auf der Kurve liegt, so verschwindet a_{00}

Definition. *(Regulär, Singulär)*

- *$P \in C$ heißt regulär, wenn $Mult_P(C) = 1$, und singulär, wenn $Mult_P(C) \geq 2$*
- 0 *regulär* $\Leftrightarrow f_1 \neq 0 \Leftrightarrow \partial_x f(0) \neq 0$ *oder* $\partial_y f(0) \neq 0$
- 0 *singulär* $\Leftrightarrow f_1 = f_0 = 0 \Leftrightarrow \partial_x f(0) = 0$ *und* $\partial_y f(0) = 0$
- *Singuläre Punkte von C :* $\begin{cases} f(X,Y) = 0 \\ \partial_x f(X,Y) = 0 \\ \partial_y f(X,Y) = 0 \end{cases}$
- *$P \in C$ singulär* $\Leftrightarrow \partial_x f(P) = \partial_y f(P) = 0$

Definition. *Sei $P \in C$ regulär, dann ist die Tangente an C durch P gegeben durch: $T_P(C) := V(\partial_x f(P)(x-a) + \partial_y f(P)(y-b))$*

Was ist mit dem singulären Punkt?
O.B.d.A. : Sei $P = 0$ mit $\mathrm{Mult}_0(C) = k$ mit $k \geq 2 \Rightarrow (\partial_x^i \partial_y^j) f(0) \quad \forall i + j < k$
$f = f_k + f_{k+1} + \ldots + f_d$. Nach (2.10) ist f_k Produkt von Linearformen l_i mit $f_k = l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots l_k$.

Definition. *$L_i = V(l_i)$ heißen singuläre Tangenten von C in 0. Wenn $l_i \neq l_j$ für $i \neq j$, dann gibt es k verschiedene singuläre Tangenten. Das nennen wir einen gewöhnlichen k-fachen Punkt.*

Beispiel. Wir betrachten nun verschiedene Kurven und deren singuläre Tangenten.

1. $f = Y^2 - X^2 + (X^2 + Y^2)^2$ hat $\mathrm{Mult}_P(C) = 2$ und $f_2 = Y^2 - X^2 = (Y + X)(Y - X)$

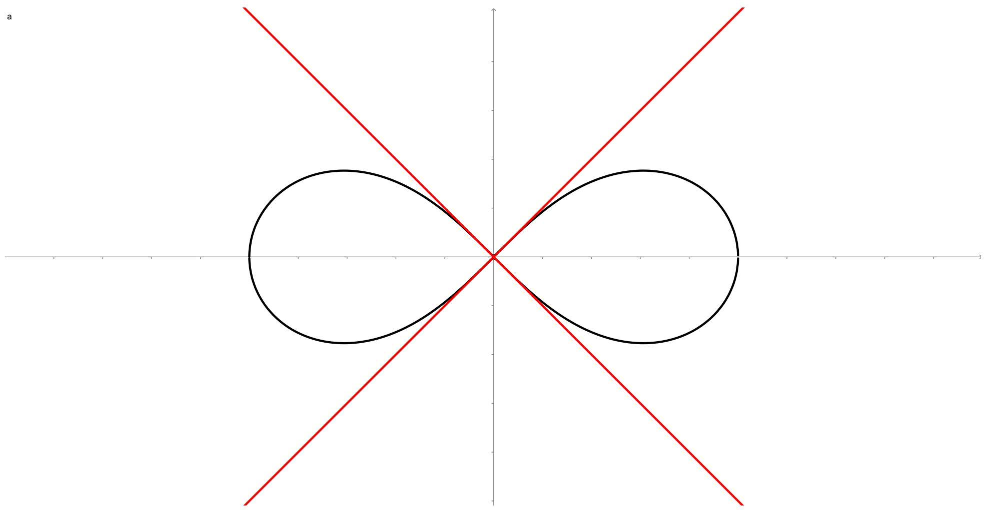


Abbildung 12: Lemniskate von Bernoulli mit beiden singulären Tangenten

2. Die Herzkurve $Y^3 - X^2 + (X^2 + Y^2)^2$ hat die doppelte singuläre Tangente $f_2 = -X^2$

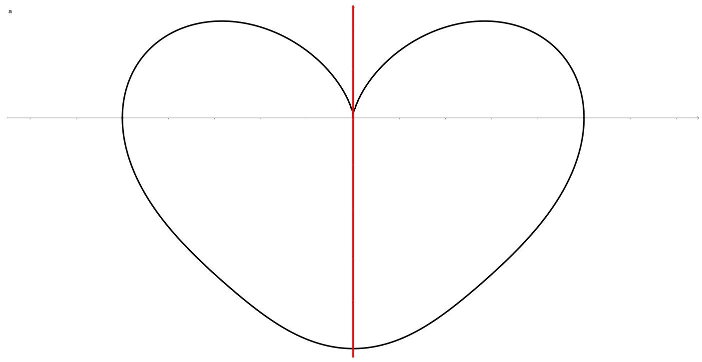


Abbildung 13: Herzkurve mit doppelter singulärer Tangente

3. $f = Y(Y^2 - 3X^2) + (X^2 + Y^2)^2$ mit $\text{Mult}_0(C) = 3$, $f_3 = Y(Y^2 - 3X^2) = Y(Y - \sqrt(3)X)(Y + \sqrt(3)X)$

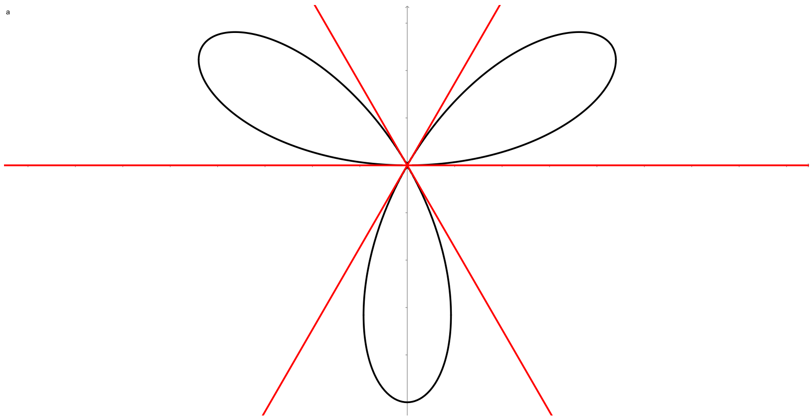


Abbildung 14: $f = Y(Y^2 - 3X^2) + (X^2 + Y^2)^2$ und seine 3 singulären Tangenten

4. $f = Y(Y^3 - X^2) + (X^2 + Y^2)^2$ mit $\text{Mult}_0(C) = 3$, $f_3 = -YX^2$

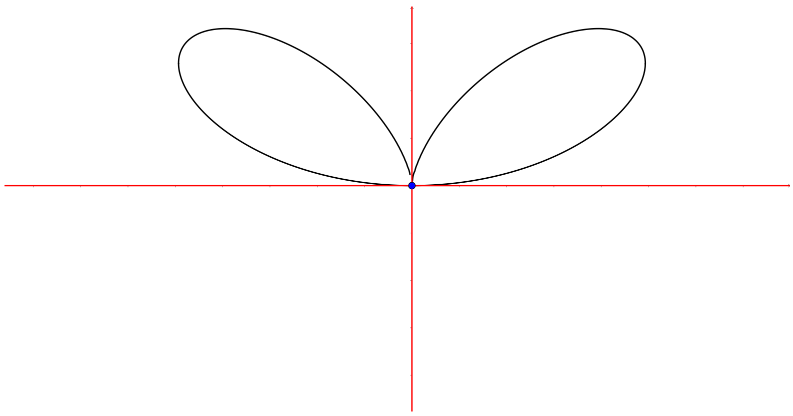


Abbildung 15: $f = Y(Y^3 - X^2) + (X^2 + Y^2)^2$ und seine 3 singulären Tangenten, wobei X=0 doppelt

5. $f = X^2Y^2 + X^5 + Y^5$ mit $\mathrm{Mult}_0(C) = 4,\ f_4 = X^2Y^2$

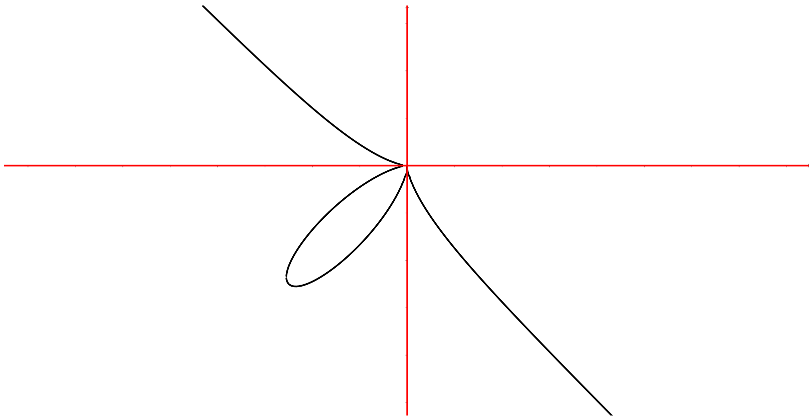


Abbildung 16: $f = X^2Y^2 + X^5 + Y^5$ und seine 2 doppelten singulären Tangenten